ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»**

Институт компьютерных наук и технологий

Высшая школа интеллектуальных систем и суперкомпьютерных технологий

Дисциплина «Методы оптимизации»

**ОТЧЕТ**

**Лабораторная работа №1**

на тему:

«Многокритериальная оптимизация»

Выполнил:

студент группы 3540901/02001

Бараев Дамир Рашидович

Проверил:

Сиднев Александр Георгиевич

Санкт-Петербург 2021

**Задание**

Дано: Содержательная задача выбора оптимального решения при наличии нескольких критериев эффективности и ограничениях на количество используемых ресурсов.

Пункты расчетного задания.

1. Осуществить переход от многокритериальной задачи к однокритериальной с использованием следующих подходов:

1. Выделение главного критерия
2. Свертка критериев
3. Максимин или минимакс (он же метод максиминной свертки)
4. Метод последовательных уступок
5. fgoalattain
6. Ведение метрики в пространстве критериев

2. Решить задачу стохастического программирования для одной из однокритериальных задач, превратив детерминированное ограничение в вероятностное по схеме

****

Менять  в следующем диапазоне 

Считать случайной величиной **** или элементы -й строки матрицы **** (по выбору).

Разрешается изменить формулировку исходной задачи, придумать собственную задачу, найти другую аналогичную задачу, которая могла бы быть сформулирована как многокритериальная.

**Задача 9**

Компания Mix владеет рестораном TeaDream и бистро-кафе TeaDream. Оба кафе находятся в центральном районе и в спальном районе города. Прибыль от блюда A в ресторане в центральном районе 350 рублей, в спальном районе 280. Прибыль от блюда A в бистро-кафе в центральном районе 310, в спальном районе 270 рублей.

Для изготовления блюда необходимо пройти две стадии – приготовление соуса и приготовление основы. В ресторане используются сложные технологии, приготовлением соуса занимается соусье, а основы повар. Для изготовления блюда в ресторане необходимо потратить 2 часа на соус и 3 часа на основу. В кафе используются автоматизированные машины. Для изготовления продуктов в кафе необходимо потратить 1 час на соус и 2 часа на основу. Ресурс времени на соус 6 часов в сутки для каждого типа заведения в сумме, а ресурс на основу 12 часов в сутки для каждого типа заведения в сумме.

Спрос на блюдо A в ресторане не менее 1 блюд в сутки, а в кафе 2 блюд в сутки.

**Вопросы:**

Какое количество блюд в каждом заведении необходимо приготовить, чтобы доход от центрального района был максимальный?

Какое количество блюд в каждом заведении необходимо приготовить, чтобы доход от спального района был максимальным?

# **Математическая модель**

**Вектор X = [R1 R2 C1 C2]**

1. Доход от ц. р-на:
2. Мин. t для обеих стадий пр- ва:

1. Доход от c. р-на:

Где R1 и R2 – количество проданных блюд А в ресторанах центрального и спального районов, C1 и C2 – количество проданных блюд А в бистро центрального и спального районов.

Ограничения:

Ограничения на количество блюд

1 ≤ R1, R2

2 ≤ C1, C2

Ограничения на ресурс

Соус:

2 \* R1 + 2 \*R2 ≤ 6

C1 + C2 ≤ 6

Основа:

3 \* R1 + 3\* R2 ≤ 12

2 \* C1 + 2 \* C2 ≤ 12

# **Переход от многокритериальной задачи к однокритериальной**

## Выделение главного критерия

**Теория**

Для сведения задачи многокритериальной оптимизации к однокритериальной критерии ранжируются и нумеруются в порядке убывания приоритета: . Решается задача нахождения при ограничениях:

…

Для нахождения решаются задачи нахождения минимума с учетом ограничений:

Значение получается умножением соответствующего минимума на коэффициент:

**Решение**

В качестве главного выбран

A = [

1 1 0 0;

0 0 1 1];

b = [

3;

6];

Aeq =[];

beq = [];

x0=[1; 1; 1; 1];

lb=[1; 1; 2; 2];

ub=[];

res = fmincon(@f1,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

f\_res = f1(res)

res = fmincon(@f2,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

f\_res = f2(res)

res = fmincon(@f3,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

f\_res = f3(res)

function y=f1(x)

y=-(x(1) \* 350 + x(2) \* 310);

end

function y=f2(x)

y=(x(1) + x(2)) \* 5 + (x(3) + x(4)) \* 3;

end

function y=f3(x)

y=-(x(2) \* 280 + x(4) \* 270);

end

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| i |  |  |
| 1 | [2.0000; 1.0000; 2.7492; 2.7492] | -1010 |
| 2 | [1.0000; 1.0000; 2.0000; 2.0000] | 22 |
| 3 | [1.0000; 2.0000; 2.0000; 4.0000] | -1640 |

Исходная многокритериальная задача сведена к следующей однокритериальной:

В качестве главного критерия выбран f1, коэффициент = 1,5 для f2 и 1.4 для f3, отсюда получаем новую задачу:

% R1 R2 C1 C2

A = [

1 1 0 0;

0 0 1 1;

5 5 3 3;

0 -280 0 -270

];

b = [

3;

6;

30;

-1148

];

Aeq =[];

beq = [];

x0=[1; 1; 1; 1];

lb=[1; 1; 2; 2];

ub=[];

res = fmincon(@f1,x0,A,b,Aeq,beq, lb,ub)

f\_res = f1(res)

% res = fmincon(@f2,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

f\_res = f2(res)

% res = fmincon(@f3,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

f\_res = f3(res)

**Результат:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | [1.7928 1.2072 2.0000 3.0000] | Решение для |
|  |  | Значение |
|  |  | Значение |
|  |  | Значение |

## Свертка критериев

**Теория**

Для сведения многокритериальной задачи к однокритериальной методом свертки производится мультипликативная или аддитивная свертка критериев.

Аддитивная свертка производится по формуле:

, где — значение в диапазоне [0;1] отражающее важность соответствующего критерия.

Нужно решить однокритериальную задачу:

Во избежание проблем, связанных с различными единицами измерения, критерии при свертке желательно нормировать:

,

где — максимальное по модулю значение в области рассмотрения.

**Решение**

Математическая модель:

1 ≤ R1, R2

2 ≤ C1, C2

R1 + R2 ≤ 3

C1 + C2 ≤ 6

Для решения задачи выбраны коэффициенты важности критериев.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| i |  |  |
| 1 | 1 | -1010 |
| 2 | 0.5 | 22 |
| 3 | 1 | -1640 |

Таким образом, получена следующая однокритериальная задача:

function y=F(x)

y = f1(x) + 0.5 \* f2(x) + f3(x);

end

A = [

1 1 0 0;

0 0 1 1

];

b = [

3;

6];

Aeq =[];

beq = [];

x0=[1;1;1;1];

lb=[1;1;2;2];

res = fmincon(@F,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

f\_res = f1(res)

**Результат:**

x = [1.0000

2.0000

2.0000

4.0000]

## Метод минимаксной свертки

**Теория**

При использовании метода минимаксной свертки нужно минимизировать функционал, составленный из исходных критериев:

При ограничениях:

**Решение**

Математическая модель:

1 ≤ R1, R2

2 ≤ C1, C2

R1 + R2 ≤ 3

C1 + C2 ≤ 6

При решении данной задачи методом минимаксной свертки важно обратить внимание на разные знаки критериев.

Минимумы функций взяты из п.1:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| i |  |  |
| 1 | [2.0000; 1.0000; 2.7492; 2.7492] | -1010 |
| 2 | [1.0000; 1.0000; 2.0000; 2.0000] | 22 |
| 3 | [1.0000; 2.0000; 2.0000; 4.0000] | -1640 |

Таким образом, приходим к задаче:

function [ y ] = J( x )

y=max([-1010/f1(x) f2(x)/22 -1640/f3(x)]);

end

A = [

1 1 0 0;

0 0 1 1

];

b = [

3;

6];

Aeq =[];

beq = [];

x0=[1;1;1;1];

lb=[1;1;2;2];

res = fmincon(@J,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

f\_res = f1(res)

**Результат:**

x = [1.1145 1.3135 2.1637 3.3144]

## Метод последовательных уступок

**Теория**

При использовании метода последовательных уступок необходимо ранжировать критерии. Для этого критерии нумеруются в порядке убывания важности:

После этого решается r однокритериальных задач:

1. min

.

.

.

…

.

**Решение**

Математическая модель:

1 ≤ R1, R2

2 ≤ C1, C2

R1 + R2 ≤ 3

C1 + C2 ≤ 6

Порядок важности критериев остается прежним.

**Шаг 1.**

Результаты взяты из п.1. (f1\*\*)

**Результат:**

x = [2.0000; 1.0000; 2.7492; 2.7492]

**Шаг 2.**

Выбрано значение

**Задача:**

R1 + R2 ≤ 3

C1 + C2 ≤ 6

1 ≤ R1, R2

2 ≤ C1, C2

A = [

1 1 0 0;

0 0 1 1;

-350 -310 0 0;

];

b = [

3;

6;

-800];

Aeq =[];

beq = [];

x0=[1;1;1;1];

lb=[1;1;2;2];

res = fmincon(@f2,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

f\_res = f1(res)

**Результат:**

|  |  |
| --- | --- |
| x | [1.4000 1.0000 2.0000 2.0000] |
|  | - |

**Шаг 3.**

Выбрано значение

**Задача:**

R1 + R2 ≤ 3

C1 + C2 ≤ 6

1 ≤ R1, R2

2 ≤ C1, C2

A = [

1 1 0 0;

0 0 1 1;

-350 -310 0 0;

5 5 3 3;

];

b = [

3;

6;

-1010;

15];

Aeq =[];

beq = [];

x0=[1;1;1;1];

lb=[1;1;2;2];

res = fmincon(@f3,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

f\_res = f1(res)

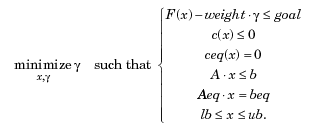
**Результат:**

|  |  |
| --- | --- |
| x | [2.0000 1.0000 2.0000 2.0000] |
|  |  |

## fgoalattain

**Теория**

Функция fgoalattain решает задачу многокритериальной минимизации в виде:



Здесь:

fun — функция критериев, которая возвращает вектор;

x0 — начальная точка;

goal — целевой вектор;

weight — вектор весов;

A, b — матрицы условий вида Ax b

Aeq, beq — матрицы условий вида Aeq\*x= beq

lb, ub — ограничения на x.

c(x), ceq(x) — нелинейные функции, возвращающие вектор.

**Решение**

Математическая модель:

1 ≤ R1, R2

2 ≤ C1, C2

R1 + R2 ≤ 3

C1 + C2 ≤ 6

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| i |  |  |
| 1 | [2.0000; 1.0000; 2.7492; 2.7492] | -1010 |
| 2 | [1.0000; 1.0000; 2.0000; 2.0000] | 22 |
| 3 | [1.0000; 2.0000; 2.0000; 4.0000] | -1640 |

Получены следующие входные параметры функции fgoalattain

, , .

function [ Y ]=Fga(x)

Y(1, 1:3) = [f1(x); f2(x); f3(x)];

end

A = [

1 1 0 0;

0 0 1 1;

];

b = [

3;

6;

];

Aeq =[];

beq = [];

x0=[1;1;1;1];

lb=[1;1;2;2];

goal = [-1010; 22; -1640];

weight =[1010; 22; 1640];

[x,fval,attainfactor] = fgoalattain(@Fga,x0,goal,weight,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

f1(x)

f2(x)

f3(x)

**Результат:**

attainfactor = 0.2424

x = [1.0000 1.3391 2.0000 3.2127]

## Ведение метрики в пространстве критериев

**Теория**

В данном методе многокритериальная задача сводится к однокритериальной путем введения метрики.

Метрика может быть такой:

Необходимо решить задачу:

**Решение**

Математическая модель:

1 ≤ R1, R2

2 ≤ C1, C2

R1 + R2 ≤ 3

C1 + C2 ≤ 6

Таблица

|  |  |
| --- | --- |
| i |  |
| 1 | -1010 |
| 2 | 22 |
| 3 | -1640 |

function y=R(x)

r1=(-1010 - f1(x));

r2=(22-f2(x));

r3=(-1640 - f3(x));

y=sqrt(r1^2+r2^2 + r3^2);

end

A = [

1 1 0 0;

0 0 1 1;

];

b = [

3;

6;

];

Aeq =[];

beq = [];

x0=[1;1;1;1];

lb=[1;1;2;2];

res = fmincon(@R,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

f\_res = f1(res)

**Результат**

x = [1.0200; 1.9800; 2.0000; 4.0000]

# **Выводы по разделу 1**

В первой части работы было произведено сведение задачи многокритериальной оптимизации к однокритериальной 5-ю разными методами, а также выполнено решение задачи многокритериальной оптимизации при помощи функции MATLAB fgoalattain.

Для каждого метода написаны скрипты в MATLAB.

Итоговый результат для каждого из методов приведен в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Метод |  |  |  |  |
| 1 | Выделение главного критерия | [1.7928; 1.2072; 2.0000; 3.0000] |  | 30 | -1148 |
| 2 | Свертка критериев | 1.0000; 2.0000; 2.0000; 4.0000 | -970 | 33 | -1640 |
| 3 | Минимаксной свертки | [1.1145; 1.3135; 2.1637; 3.3144] |  | 28.5743 | -1262 |
| 4 | Последовательных уступок | [2.0000; 1.0000; 2.7492; 2.7492] |  | 31.4952 | -1022 |
| 5 | fgoalattain | 1.0000; 1.3391; 2.0000; 3.2127 | -1010 | 29.0559 | -1005 |
| 6 | Введение метрики |  | -970.8 | 33 | -1634 |

Основным критерием при работе с каждым из методов считался — доход от ц. р-на.

Проанализировав итоговые результаты, можно сказать, что все решения принадлежат множеству Парето, т.е. среди них нет ни одного решения, которое хуже других по всем (трем) параметрам.

# **Cтохастическоe программированиe**

**Теория**

В случае, если необходимо решить задачу многокритериальной оптимизации при наличии стохастических ограничений вида

Стохастические ограничения преобразуются в детерминированные следующим образом:

,

где — квантиль нормального распределения,

— случайная величина

— дисперсия величина .

**Решение**

Математическая модель исходной задачи:

1 ≤ R1, R2

2 ≤ C1, C2

R1 + R2 ≤ 3

C1 + C2 ≤ 6

Будем считать ограничение на ресурс на соус для спального района стохастическим

Причем случайной величиной будет . Пусть распределение характеризуется следующими параметрами:

Тогда:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|  | 0.253347 | 0.524401 | 0.841621 | 1.281552 |

И мы получаем детерменированное условие:

Новая задача:

1 ≤ R1, R2

2 ≤ C1, C2

R1 + R2 ≤ 3

C1 + C2 ≤

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|  | 0.253347 | 0.524401 | 0.841621 | 1.281552 |

Решим эту задачу методом свертки:

function y=F(x)

y = f1(x) + 0.5 \* f2(x) + f3(x);

end

Bi = [0.6 0.7 0.8 0.9];

Ta = [0.253347 0.524401 0.841621 1.281552];

for i = 1:4

A = [

1 1 0 0;

0 0 1 1

];

b = [

3;

(7 - Ta(i) \* 2)];

Aeq =[];

beq = [];

x0=[1;1;1;1];

lb=[1;1;2;2];

ub = [];

res = fmincon(@F,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

f\_res = f1(res)

end

**Результат:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 1.0000  2.0000  2.0000  4.4933 | 1.0000  2.0000  2.0000  3.9512 | 1.0000  2.0000  2.0000  3.3168 | 1.0000  2.0000  2.0000  2.4369 |
|  | -970.0000 | -969.9998 | -969.9998 | -970 |
|  | 34.4799 | 32.8536 | 30.9503 | 28.3107 |
|  | -1773 | -1626 | -1455 | -1218 |

При увеличении растет ограничение на ресурс соуса для спального района, таким образом, что максимальный доход от спального района уменьшается, в тоже время уменьшая общее время приготовления блюд.